ÉCOLE NAVALE

Concours 1987

Première composition de Mathématiques

Question préliminaire :

Soit l'équation différentielle :

$$(1) \qquad x'' + \omega^2 x = 0$$

où $\omega > 0$, x est une fonction réelle de la variable réelle t et l'on note $x' = dx/dt$, $x'' = d^2x/dt^2$.

Écrire la solution $x(t)$ de conditions initiales $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$ et déterminer sa période. Montrer que la quantité $E_0 = 1/2\,(x'^2 + \omega^2 x^2)$ est indépendante de t lorsque x obéit à l'équation (1).

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

1ère partie :

On s'intéresse dans cette partie à l'équation différentielle non linéaire (équation d'un pendule pesant) :

$$(2) \qquad x'' + \omega^2 \sin x = 0$$

dans laquelle $\omega > 0$ est fixé.

1°) Montrer que si la fonction $x(t)$ est solution de l'équation (2) et si $t_0 \in \mathbb{R}$, les fonctions $t \to x(-t)$, $t \to -x(t)$, $t \to x(t) + 2\pi$ et $t \to x(t - t_0)$ sont également des solutions de cette équation.

2°) Montrer que la quantité

$$(3) \qquad E = 1/2\, x'^2 + \omega^2 (1 - \cos x)$$

est invariante (indépendante de t) lorsque $x(t)$ vérifie l'équation (2). Calculer E pour les trois solutions particulières $x = 0$, $x = \pm\pi$.

3°) En utilisant l'invariance de E, écrire la solution $x(t)$ de l'équation (2) telle que $x(0) = 0$, $x'(0) = 2\omega$; pour ce faire on calculera la valeur de E pour cette solution, puis on exprimera t en fonction de x comme une intégrale définie, que l'on calculera explicitement (justifier la détermination de la racine carrée qui intervient) ; on inversera enfin le résultat pour obtenir x comme fonction de t. Calculer $\lim_{t \to \pm\infty} x(t)$.

4°) On pose $x' = y$; l'équation (3) définit pour toute valeur de E fixée une courbe Γ_E dans le plan (x, y). A quelles symétries de ces courbes correspondent les invariances de l'équation (2) décrites au 1° ? Montrer que la partie de la courbe Γ_E située dans la bande $-\pi < x < +\pi$ est fermée si et seulement si $E < 2\omega^2$. Tracer la courbe Γ_E pour $E = \omega = 1$ et indiquer par des flèches le sens de parcours de cette courbe par une solution de l'équation (2).

5°) On s'intéresse à des solutions de l'équation (2) telles que $0 < E < 2\omega^2$; en utilisant encore les invariances décrites au 1°, montrer que ces solutions sont périodiques et que leur période est donnée par :

$$(4) \qquad T = 4 \int_0^{x_m} [2\,\{E - \omega^2 (1 - \cos x)\}]^{-1/2}\, dx$$

où la valeur de x_m est déterminée par (3) lorsque $x' = 0$.

Écrire, en utilisant E_0, l'intégrale analogue donnant la période des solutions de l'équation (1) ; calculer cette intégrale et vérifier que l'on obtient bien le résultat attendu.

6°) On pose $E = 2\omega^2 k^2$, $\sin x/2 = k \sin \varphi$ $(k > 0)$; effectuer le changement de variables dans (4) et donner l'expression de $T = T(k)$ en fonction de cette variable. Montrer que $T(k)$ admet un développement en série entière par rapport à k^2 (justifier l'intégration terme à terme de la série entière de l'intégrant) et déterminer son rayon de convergence. Calculer les deux premiers termes de ce développement. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, établir, en la justifiant, une majoration du reste, d'ordre k^4, valable lorsque $k \leqslant 1/2$.

Tournez la page S. V. P.

2ème partie :

On considère l'équation différentielle linéaire :

$$(5) \qquad x'' = f(t)\, x$$

dans laquelle x est la fonction inconnue à valeurs complexes et f une fonction réelle de classe C^1, périodique de période 2π $(f(t + 2\pi) = f(t))$.

1°) Si $x(t)$ est solution de l'équation (5), on note $\xi(t) \in \mathbb{C}^2$ le vecteur colonne ${}^t(x(t), x'(t))$; écrire la matrice $F(t)$ telle que $d\xi/dt = F(t)\,\xi$.

2°) Pour deux solutions x_1 et x_2 de l'équation (5), on note $W(x_1, x_2) = x_1 x_2' - x_1' x_2$. Montrer que W est indépendant de t et qu'il est non nul si et seulement si x_1 et x_2 sont deux solutions linéairement indépendantes, ce que l'on supposera désormais ; ces deux fonctions forment alors une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation (5).

3°) On note $X(t)$ la matrice carrée d'ordre 2 formée des deux vecteurs colonnes ${}^t(x_i, x_i')$ $(i = 1, 2)$; calculer $\det X(t)$. Vérifier que $X(t)$ est solution de l'équation matricielle :

$$(6) \qquad dX/dt = F(t)\,X$$

Montrer que $X(t + 2\pi)$ est également solution de l'équation (6) et en déduire qu'il existe une matrice T indépendante de t telle que $X(t + 2\pi) = X(t)\,T$.

4°) Montrer que $\det T = 1$.

5°) On reprend l'équation (1) de la question préliminaire, qui est un cas particulier de (5). Calculer T dans ce cas en utilisant la base de solutions (x_1, x_2) telle que $X(0) = I$ (matrice identité).

6°) On considère une autre base de solutions de l'équation (5), soient $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_2$, ainsi que les matrices correspondantes $\tilde{X}(t)$ et $\tilde{T}$. Montrer que les matrices T et $\tilde{T}$ sont semblables.

7°) Remarquer que si x est solution de l'équation (5), $\overline{x}$ (complexe conjugué) l'est aussi, et que donc si λ est valeur propre de T, $\bar{\lambda}$ l'est également ; en utilisant cette contrainte et la question 4°, déterminer les couples de valeurs propres $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ a priori possibles pour T et préciser les cas dans lesquels T peut n'être pas diagonalisable.

8°) On suppose que l'une des valeurs propres de T est une racine de l'unité, soit $\lambda = \exp(2i\pi p/q)$ où p et q sont premiers entre eux et $q \geqslant 2$. Calculer $\mathrm{Tr}\,T$ (trace de la matrice T) et T^q. En déduire que toutes les solutions de l'équation (5) sont périodiques et déterminer leur période minimale.

9°) On dit que le système décrit par l'équation (5) est instable s'il existe une solution $x(t)$ telle que $\lim_{t \to +\infty} |x(t)| = +\infty$, et que le système est stable sinon. Montrer que le système est stable si $|\mathrm{Tr}\,T| < 2$ et instable si $|\mathrm{Tr}\,T| > 2$.

10°) Soit l'équation :

$$(7) \qquad x'' + \omega^2 (1 + \varepsilon\, a(t))\, x = 0$$

du type de (5), dans laquelle $a(t)$ est une fonction réelle de classe C^1 périodique de période 2π et ε un nombre réel. En utilisant la question 5°, déterminer l'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}$ vérifiant : pour tout $\omega \in \Omega$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que le système décrit par (7) est stable lorsque $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.